சார்புகள்

வருமானச் சார்புகளும் கேள்விச் சார்புகளும்

வருமானச் சார்புகள் கேள்விச் சார்புகளுடன் சம்பந்தப்பட்டவை ஆகும். அதாவது கணியம் (x) இனால் கேள்விச் சார்பினைப் பெருக்குவதன் மூலம் வருமானச் சார்பினை எங்களால் பெற்றுக்கொள்ள முடியும்.

அதாவது, வருமானச் சார்பு = கேள்விச் சார்பு x x

உ+ம் **1 :** கேள்விச் சார்பு $2x + 3$ ஆக இருக்குமெனின், வருமானச் சார்பினைக் கணிக்குக.

வருமானச் சார்பு = கேள்விச் சார்பு x x

= $(2x + 3)$ x x

= $2x^2 + 3x$

உ+ம் **2 :** கேள்விச் சார்பு $4x^2 + 5x - 3$ ஆக இருக்குமெனின், வருமானச் சார்பினைக் கணிக்குக.

வருமானச் சார்பு = கேள்விச் சார்பு x x

= $(4x^2 + 5x - 3)$ x x

= $4x^3 + 5x^2 - 3x$

மொத்தக் கிரயச் சார்புகள், மாறும் கிரயச் சார்புகள் மற்றும் நிலையான கிரயம்

மொத்தக் கிரயச் சார்பானது மாறும் கிரயச் சார்பையும் நிலையான கிரயத்தையும் உள்ளடக்கியுள்ளது.

அதாவது, மொத்தக் கிரயச் சார்பு = மாறும் கிரயச் சார்பு + நிலையான கிரயம்

குறிப்பு : *இங்கு, மாறும் கிரயச் சார்பு இருபடிச் சமன்பாட்டு வடிவிலும் (உ+ம் : $1000x^2 + 8000x$) நிலையான கிரயம் பணத்தொகை போன்ற வடிவிலும் (உ+ம் : ரூ. 40 000/-) தரப்படும்.*

உ+ம் **1 :** மாறும் கிரயச் சார்பு $2x^2 + 3x$ ஆகவும் நிலையான கிரயம் ரூ. 300,000/- ஆகவும் இருப்பின், மொத்தக் கிரயச் சார்பினை அடையாளங்காண்க.

மொத்தக் கிரயச் சார்பு = மாறும் கிரயச் சார்பு + நிலையான கிரயம்

= $2x^2 + 3x + 300{,}000$

உ+ம் **2 :** மாறும் கிரயச் சார்பு $4x^2 + 2x$ ஆகவும் நிலையான கிரயம் ரூ. 1000 ஆகவும் இருப்பின், மொத்தக் கிரயச் சார்பினை அடையாளங்காண்க.

மொத்தக் கிரயச் சார்பு = மாறும் கிரயச் சார்பு + நிலையான கிரயம்

= $4x^2 + 2x + 1000$

இலாபச் சார்புகள்

வருமானத்திலிருந்து மொத்தக் கிரயத்தைக் கழிப்பதன் மூலம் இலாபம் கணிக்கப்படுகிறது. அதேபோன்று வருமானச் சார்பிலிருந்து மொத்தக் கிரயச் சார்பைக் கழிப்பதன் மூலம் இலாபச் சார்பு பெறப்படுகிறது.

அதாவது, இலாபச் சார்பு = வருமானச் சார்பு – மொத்தக் கிரயச் சார்பு

உ+ம் **1 :** மொத்தக் கிரயச் சார்பு $\mathbf{40 + 4x}$ ஆகவும் வருமானச் சார்பு $\mathbf{24x - 2x^2}$ ஆகவும் இருப்பின் இலாபச் சார்பினைக் கணிக்குக.

இலாபச் சார்பு = வருமானச் சார்பு – மொத்தக் கிரயச் சார்பு

= $24x - 2x^2 - (40 + 4x)$

= $24x - 2x^2 - 40 - 4x$

= $20x - 2x^2 - 40$

குறிப்பு : *எண்கணித வழுவைத் தவிர்ப்பதற்கு, மொத்தக் கிரயச் சார்பினைக் கழிக்கும் வேளையில் மேலே காட்டப்பட்டுள்ளவாறு அடைப்புக்குறி இட்டுக்கொள்வது சௌகரியமானதாக இருக்கும்.*

aat SRI LANKA

உ+ம் **2 :** கீழ்வரும் தகவல்கள் உங்களுக்குத் தரப்பட்டுள்ளன.

- கேள்விச் சார்பு = 120,000 + 100x
- மாறும் கிரயச் சார்பு = 7000x + 1000x^2
- நிலையான கிரயம் = ரூ. 900,000/-

மேலுள்ள தகவல்களைப் பயன்படுத்தி, வருமானச் சார்பு, மொத்தக் கிரயச் சார்பு மற்றும் இலாபச் சார்பு ஆகியவற்றைக் கணிக்குக.

வருமானச் சார்பு = கேள்விச் சார்பு x x
= $(120,000 + 100x) \times x$
= $120,000x + 100x^2$

மொத்தக் கிரயச் சார்பு = மாறும் கிரயச் சார்பு + நிலையான கிரயம்
= $7000x + 1000x^2 + 900,000$

இலாபச் சார்பு = வருமானச் சார்பு – மொத்தக் கிரயச் சார்பு
= $120,000x + 100x^2 - (7000x + 1000x^2 + 900,000)$
= $120,000x + 100x^2 - 7000x - 1000x^2 - 900,000$
= $113000x - 900x^2 - 900,000$

எல்லை வருமானச் சார்புகளும் எல்லை கிரயச் சார்புகளும்

➢ எல்லை வருமானச் சார்பினைக் எவ்வாறு கணிப்பது?

வருமானச் சார்பினை வகையிடுவதன் மூலம் எல்லை வருமானச் சார்பினைக் கணிக்க முடியும்.

உ+ம் **1 :** வருமானச் சார்பு $5x^2 + 4x + 2000$ எனின், எல்லை வருமானச் சார்பினைக் கணிக்குக.

வருமானச் சார்பு (R) = $5x^2 + 4x + 2000$

எல்லை வருமானச் சார்பு $\frac{d(R)}{dx}$ = $(5\times2)\, x^{2-1} + 4x^{1-1} + 0$
= $10x + 4 + 0$
= $10x + 4$

உ+ம் **2:** கேள்விச் சார்பு $4x^2 + 5x - 3$ எனின், எல்லை வருமானச் சார்பினைக் கணிக்குக.

எல்லை வருமானச் சார்பினைத் துணிவதற்கு எங்களுக்கு வருமானச் சார்பு தேவைப்படுகிறது. ஆனால் இங்கு கேள்விச் சார்பு மாத்திரம் தரப்பட்டுள்ளது. எனவே, முதலில் நாங்கள் கேள்விச் சார்பிலிருந்து வருமானச் சார்பினைக் கணிப்பிடுதல் வேண்டும்.

வருமானச் சார்பு (R) = கேள்விச் சார்பு x x
= $(4x^2 + 5x - 3) \times x$
= $4x^3 + 5x^2 - 3x$

எல்லை வருமானச் சார்பு $\frac{d(R)}{dx}$ = $(4\times3)x^{3-1} + (5\times2)x^{2-1} - 3x^{1-1} = 12x^2 + 10x - 3$

➢ **இதேபோன்று மொத்தக் கிரயச் சார்பினை வகையிடுவதன் மூலம் எல்லைக் கிரயச் சார்பினைக் எங்களால் கணிப்பிட முடியும்.**

உ+ம் **1 :** மொத்தக் கிரயச் சார்பு $x^2 - 20x + 1000$ எனின், எல்லைக் கிரயச் சார்பினைக் கணிக்குக.

மொத்தக் கிரயச் சார்பு (TC) = $x^2 - 20x + 1000$

∴ எல்லைக் கிரயச் சார்பு $\frac{d(TC)}{dx}$ = $2x - 20 + 0$
= $2x - 20$

SRI LANKA

உ+ம் **2 :** மாறும் கிரயச் சார்பு $5x^2 + 4x$ ஆகவும் நிலையான கிரயம் ரூ. 2000 ஆகவும் இருப்பின், எல்லைக் கிரயச் சார்பினைக் கணிக்குக.

எல்லைக் கிரயச் சார்பினைத் துணிவதற்கு எங்களுக்கு மொத்தக் கிரயச் சார்பு தேவைப்படுகிறது. ஆனால் இங்கு மாறும் கிரயச் சார்பும் நிலையான கிரயமும் வழங்கப்பட்டுள்ளன. எனவே, முதலில் நாங்கள் மாறும் கிரயச் சார்பையும் நிலையான கிரயத்தையும் பயன்படுத்தி மொத்தக் கிரயச் சார்பை கணிப்பிடுதல் வேண்டும்.

மொத்தக் கிரயச் சார்பு (TC) = மாறும் கிரயச் சார்பு + நிலையான கிரயம்

$= 5x^2 + 4x + 2000$

∴ எல்லைக் கிரயச் சார்பு $\frac{d(TC)}{dx} = 10x + 4 + 0 = 10x + 4.$

சமப்பாட்டு (இலாப – நட்டமற்ற) கணியம்

இலாப – நட்டமற்ற புள்ளியில் அலகுகளின் எண்ணிக்கையினை (கணியத்தை) கணிப்பதற்கு இரண்டு முறைகள் காணப்படுகின்றன.

முறை 1

இலாபச் சார்பை பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துவதன் மூலம் அல்லது மொத்தக் கிரயச் சார்பை வருமானச் சார்புடன் சமப்படுத்துவதன் மூலம் பெறப்படும் விடைகள் இலாப – நட்டமற்ற புள்ளியில் காணப்படும் அலகுகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமனாக இருக்கும்.

இலாபச் சார்பு = 0

அல்லது

மொத்தக் கிரயச் சார்பு = வருமானச் சார்பு

உ+ம் : மொத்தக் கிரயச் சார்பு $300x + 4800$ ஆகவும் வருமானச் சார்பு $-2x^2 + 500x$ ஆகவும் இருப்பின் இலாப – நட்டமற்ற புள்ளியில் அலகுகளின் எண்ணிக்கையைக் கணிக்குக.

மொத்தக் கிரயச் சார்பு = வருமானச் சார்பு

$300x + 4800 = -2x^2 + 500x$

$2x^2 - 500x + 300x + 4800 = 0$

$x^2 - 100x + 2400 = 0$

$\Rightarrow x = 60$ or $x = 40$

இலாபச் சார்பு = 0

வருமானச் சார்பு – மொத்தக் கிரயச் சார்பு = 0

$-2x^2 + 500x - (300x + 4800) = 0$

$-2x^2 + 500x - 300x - 4800 = 0$

$x^2 - 100x + 2400 = 0$

$\Rightarrow x = 60$ or $x = 40$

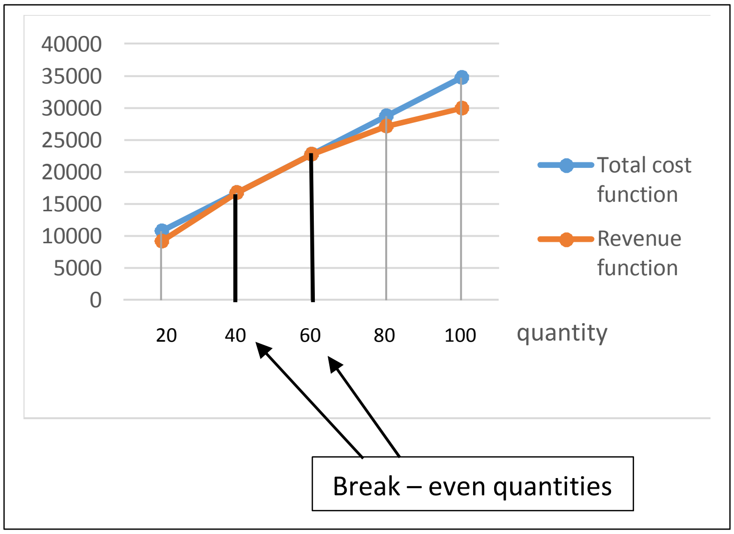
∴ இலாப – நட்டமற்ற புள்ளியில் அலகுகளின் எண்ணிக்கை 60, 40 ஆகும்.

முறை 2

மொத்தக் கிரயச் சார்பையும் வருமானச் சார்பையும் ஒரே வரைபில் வரைவதன் மூலம் இலாப – நட்டமற்ற புள்ளியிலுள்ள அலகுகளின் எண்ணிக்கையைக் கணித்தல்

உ+ம் : மேலுள்ள உதாரணத்தைக் கருத்திற்கொள்க. (உதவிக் குறிப்பு: வரைபுக்கான "x" இன் பெறுமானங்களாக 20, 40, 60 80, 100 ஆகியவற்றைத் தெரிவுசெய்க.)

மொத்தக் கிரயச் சார்பு $300x + 4800$		வருமானச் சார்பு $-2x^2 + 500x$	
$x = 20 \Rightarrow$	300 x 20 + 4800 = 10,800	$x = 20 \Rightarrow$	–2 x 20² + 500 x 20 = 9,200
$x = 40 \Rightarrow$	**300 x 40 + 4800 = 16,800**	**$x = 40 \Rightarrow$**	**-2 x 40² +500 x 40 = 16,800**
$x = 60 \Rightarrow$	**300 x 60 + 4800 = 22,800**	**$x = 60 \Rightarrow$**	**-2 x 60² + 500 x 60 = 22,800**
$x = 80 \Rightarrow$	300 x 80 + 4800 = 28,800	$x = 80 \Rightarrow$	-2 x 80² + 500 x 80 = 27,200
$x = 100 \Rightarrow$	300 x 100 + 4800 = 34,800	$x = 100 \Rightarrow$	-2 x 100² + 500 x 100 = 30,000



இலாபம் உச்சமாகும் புள்ளி

இலாபம் உச்சமாகும் புள்ளியில் அலகுகளின் எண்ணிக்கையை எவ்வாறு கணிப்பிடுவது?

இலாபம் உச்சமாகும் புள்ளியையும் அப்புள்ளியில் அலகுகளின் எண்ணிக்கையையும் கண்டு பிடிப்பதற்கு இரண்டு முறைகள் உள்ளன.

<u>முறை 1</u> (வகையிடுவதன் மூலம்)

இலாபம் உச்சமாகும் புள்ளியில், இலாபச் சார்பின் ***<u>முதலாவது வகையீடு பூச்சியத்திற்குச் சமனாகவும் இரண்டாவது வகையீடு மறைப் பெறுமானமாகவும்</u>*** இருக்கும்.

உ+ம் : மொத்தக் கிரயச் சார்பு $300x + 4800$ ஆகவும் வருமானச் சார்பு $-2x^2 + 500x$ ஆகவும் இருப்பின் இலாபச் சார்பினையும் இலாபம் உச்சமாகும் போதுள்ள அலகுகளின் எண்ணிக்கையினையும் கணிக்குக.

இலாபச் சார்பு = வருமானச் சார்பு – மொத்தக் கிரயச் சார்பு

$= -2x^2 + 500x - (300x + 4800)$

P **$= -2x^2 + 200x - 4800.$**

இலாபம் உச்சமாகும் புள்ளியில் அலகுகளின் எண்ணிக்கையைக் கணித்தல் :

இலாபச் சார்பின் ***முதலாவது வகையீட்டை பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்தல்*** வேண்டும்.

எனவே, $\frac{d(P)}{dx} = -4x + 200 = 0 \Rightarrow 4x = 200$

$x = 50$

இலாபச் சார்பின் ***இரண்டாவது வகையீடு மறைப் பெறுமானமாக இருத்தல் வேண்டும்.***

ஆகவே, $\frac{d^2(P)}{dx^2} = -4 < 0$

இரு நிபந்தனைகளும் திருப்திசெய்யப்பட்டுள்ளன.

$\therefore\ x = 50.$

<u>முறை 2</u> (இலாப – நட்டமற்ற புள்ளிகளைப் பயன்படுத்தி)

உ+ம் 1 : மொத்தக் கிரயச் சார்பு $300x + 4800$ ஆகவும் வருமானச் சார்பு $-2x^2 + 500x$ ஆகவும் இருப்பின், இலாபச் சார்பையும் இலாபம் உச்சமாகும் புள்ளியில் அலகுகளின் எண்ணிக்கையையும் கணிக்குக.

இலாப – நட்டமற்ற புள்ளியில்,

மொத்தக் கிரயச் சார்பு = வருமானச் சார்பு

$300x + 4800 = -2x^2 + 500x$

$2x^2 - 500x + 300x + 4800 = 0$

$x^2 - 100x + 2400 = 0 \Rightarrow x = 60$ or $x = 40$

$\therefore$ இலாப – நட்டமற்ற புள்ளியில் அலகுகளின் எண்ணிக்கை 60, 40 ஆகும்.

எனவே, இலாபம் உச்சமாகும்போது அலகுகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{60+40}{2} = 50 \quad \therefore\ x = 50.$

உ+ம் 2 : கம்பனி ஒன்றின் வாராந்த இலாபச் சார்பு $\mathbf{P = 1{,}400x - x^2 - 240{,}000}$ இனால் தரப்படுகிறது. இங்கு x என்பது வாராந்தம் உற்பத்தி செய்யப்படும் அலகுகளின் எண்ணிக்கை ஆகும். வாராந்த இலாபத்தை உச்சப்படுத்துவதற்கு விற்பனை செய்யப்படவேண்டிய அலகுகளின் எண்ணிக்கை யாது?

$$P = -x^2 + 1400x - 240{,}000 = 0$$
$$\frac{d(P)}{dx} = -2x + 1400 = 0 \Rightarrow 2x = 1400 \Rightarrow x = 700$$
$$\frac{d^2(P)}{dx^2} = -2 < 0 \qquad \therefore x = 700.$$

பயிற்சிகள்

01. உற்பத்திக் கம்பனி ஒன்றின் அலகு ஒன்றுக்கான மாறும் கிரயம் ரூ. 6/- ஆக இருப்பதுடன் அதன் மொத்த நிலையான கிரயம் ரூ. 560/- ஆகவும் காணப்படுகிறது. அக்கம்பனியின் மொத்த வருமானச் சார்பு கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

$TR = -2x^2 + 30x + 520$ இங்கு x என்பது உற்பத்தி செய்யப்பட்ட அலகுகளின் எண்ணிக்கை.

(i) இலாபச் சார்பைக் கணிக்குக.
(ii) வகையீட்டைப் பயன்படுத்தி, இலாபம் உச்சமாகும் புள்ளியில் அலகுகளின் எண்ணிக்கையைக் கணிக்குக.

விடைகள்:

(i) இலாபச் சார்பு = வருமானச் சார்பு – மொத்தக் கிரயச் சார்பு
= வருமானச் சார்பு – (மாறும் கிரயச் சார்பு + நிலையான கிரயம்)
$= -2x^2 + 30x + 520 - (6x + 560)$
$= -2x^2 + 30x + 520 - 6x - 560$
$P = \mathbf{-2x^2 + 24x - 40}$

(ii) இலாபச் சார்பு $(P) = -2x^2 + 24x - 40$
$$\frac{d(P)}{dx} = -4x + 24 = 0 \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6$$
$$\frac{d^2(P)}{dx^2} = -4 < 0 \qquad \therefore x = 6$$

02. ஓர் கம்பனியின் இயந்திரங்களில் ஒன்று வாராந்தம் அதிகபட்சமாக 10,000 அலகுகளை உற்பத்தி செய்யும் திறன் கொண்டது. "x" அலகுகளை உற்பத்தி செய்வதற்கான வாராந்தக் கிரயம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

$TC = 75{,}000 + 100x - 0.03x^2 + 0.000004x^3$
அலகுகளுக்கான கேள்விச் சார்பு $D = 200 - 0.005x$

எல்லைக் கிரயச் சார்பு, எல்லை வருமானச் சார்பு எல்லை இலாபச் சார்பு ஆகியவற்றைக் கணிக்குக.

விடைகள்:

(i) மொத்தக் கிரயச் சார்பு $(TC) = 75{,}000 + 100x - 0.03x^2 + 0.000004x^3$
எல்லைக் கிரயச் சார்பு $= \frac{d(TC)}{dx} = 0 + 100 - 0.06x + 0.000012x^2$
$= 100 - 0.06x + 0.000012x^2$

(ii) வருமானச் சார்பு (R) = கேள்விச் சார்பு x x
$= (200 - 0.005x) \times x = 200x - 0.005x^2$
எல்லை வருமானச் சார்பு $= \frac{d(R)}{dx} = 200 - 0.01x$

(iii) இலாபச் சார்பு (P) = வருமானச் சார்பு – மொத்தச் செலவுச் சார்பு

$= 200x - 0.005x^2 - (75{,}000 + 100x - 0.03x^2 + 0.000004x^3)$

$= 200x - 0.005x^2 - 75{,}000 - 100x + 0.03x^2 - 0.000004x^3$

$= 100x + 0.25x^2 - 75{,}000 - 0.000004x^3$

எல்லை இலாபச் சார்பு $= \frac{d(P)}{dx} = 100 + (0.25 \times 2)x^{2-1} - 0 - (0.000004 \times 3)x^{3-1}$

$= 100 + 0.5x - 0 - 0.000012x^2$

$= 100 + 0.5x - 0.000012x^2$

03. கம்பனி ஒன்றின் மொத்தக் கிரயச் சார்பும் வருமானச் சார்பும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இங்கு x என்பது உற்பத்தி செய்து விற்பனை செய்யும் அலகுகளின் எண்ணிக்கை ஆகும் :

$TR = 8x$, $TC = 6x + 1{,}400$

இலாப – நட்டமற்ற புள்ளியில் அலகுகளின் எண்ணிக்கையைக் கணிக்குக.

விடைகள்:

(i) இலாப – நட்டமற்ற புள்ளியில்,

மொத்தக் கிரயச் சார்பு = வருமானச் சார்பு

$6x + 1{,}400 = 8x$

$8x - 6x = 1400$

$2x = 1400 \Rightarrow x = 700$

04. கீழே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றைக் கணிக்குக.

(i) வருமானச் சார்பு

(ii) மொத்தக் கிரயச் சார்பு

(iii) இலாபச் சார்பு

(iv) எல்லை வருமானச் சார்பு

(v) எல்லைக் கிரயச் சார்பு

(vi) இலாப நட்டமற்ற புள்ளியில் அலகுகளின் எண்ணிக்கை

கேள்விச் சார்பு = $3x + 7$

மாறும் கிரயச் சார்பு = $3x^2 - 3x$

நிலையான கிரயம் = ரூ. 60/-

விடைகள்:

(i) வருமானச் சார்பு = கேள்விச் சார்பு x x

$= (3x + 7) \times x$

$= 3x^2 + 7x$

(ii) மொத்தக் கிரயச் சார்பு = மாறும் கிரயச் சார்பு + நிலையான கிரயம்

$= 3x^2 - 3x + 60$

(ii) இலாபச் சார்பு = வருமானச் சார்பு – மொத்தக் கிரயச் சார்பு

$= 3x^2 + 7x - (3x^2 - 3x + 60)$

$= 3x^2 + 7x - 3x^2 + 3x - 60$

$= 10x - 60$

(iv) எல்லை வருமானச் சார்பு = $\frac{d(R)}{dx} = 6x + 7$

(v) எல்லைக் கிரயச் சார்பு = $\frac{d(TC)}{dx} = 6x - 3$

(vi) இலாப – நட்டமற்ற புள்ளியில் ⇒ வருமானச் சார்பு = மொத்தக் கிரயச் சார்பு

$3x^2 + 7x = 3x^2 - 3x + 60$

$10x = 60$

$\Rightarrow x = 6$

aat SRI LANKA